

第3讲 二次函数与方程、不等式练习

一、二次函数与坐标轴交点

练习

1. 2019~2020学年12月安徽合肥包河区合肥阳光中学初三上学期月考第1题4分 ★★

抛物线 $y = x^2 - 3x + 2$ 与 y 轴交点的坐标是 () .

- A. (0, 2) B. (1, 0) C. (0, -3) D. (0, 0)

【答案】 A

【解析】 ∵ 抛物线与 y 轴交点的横坐标为 0 , 即 $x = 0$,

∴ 此时 $x = 0$, $y = 2$,

∴ 抛物线 $y = x^2 - 3x + 2$ 与 y 轴交点的坐标是 (0, 2) .

故选 A .

【标注】 【知识点】 二次函数与坐标轴交点

2. 2019~2020学年9月天津北辰区天津市北仓第二中学初三上学期月考第17题3分 ★★★

抛物线 $y = -2(x - 1)^2 - 3$ 与 y 轴交点的坐标为 _____ .

【答案】 (0, -5)

【解析】 当 $x = 0$ 时 , $y = -2 \times 1 - 3 = -5$,

则抛物线 $y = -2(x - 1)^2 - 3$ 与 y 轴交点的坐标为 (0, -5) ,

故答案为 : (0, -5) .

【标注】 【知识点】 二次函数与坐标轴交点

练习

3. 2018~2019学年广东湛江廉江市廉江市实验学校初三上学期期中 (优秀班) 第7题3分 ★★

已知二次函数 $y = kx^2 - 7x - 7$ 的图象与 x 轴没有交点 , 则 k 的取值范围为 () .

- A. $k > -\frac{7}{4}$ B. $k \geq -\frac{7}{4}$ 且 $k \neq 0$ C. $k < -\frac{7}{4}$ D. $k > -\frac{7}{4}$ 且 $k \neq 0$

【答案】 C

【解析】 $\because y = kx^2 - 7x - 7$ 的图象与 x 轴无交点，

$\therefore$ 当图象在 x 轴上方时， $\begin{cases} k > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ ，

$\therefore \begin{cases} k > 0 \\ 49 + 28k < 0 \end{cases}$ ，解为空集．

当图象在 x 轴下方时， $\begin{cases} k < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ ，

$\therefore \begin{cases} k < 0 \\ 49 + 28k < 0 \end{cases}$ ，

$\therefore k < -\frac{7}{4}$ ．

$\therefore k$ 的取值范围是 $\left\{k \mid k < -\frac{7}{4}\right\}$ ．

故选 C．

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

4. 2017~2018学年江苏苏州初三上学期期中第17题3分 ★★

若函数 $y = (a - 1)x^2 - 4x + 2a$ 的图象与 x 轴有且只有一个交点，则 a 的值为 _____ ．

【答案】 -1或2或1

【解析】 $\because$ 函数 $y = (a - 1)x^2 - 4x + 2a$ 的图象与 x 轴有且只有一个交点，

当函数为二次函数时， $a - 1 \neq 0$ ，

$$b^2 - 4ac = 16 - 4(a - 1) \times 2a = 0，$$

解得： $a_1 = -1$ ， $a_2 = 2$ ，

当函数为一次函数时，

$$a - 1 = 0，\text{解得：} a = 1．$$

故答案为：-1或2或1．

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

5. 2020年陕西汉中初三中考一模第10题3分 ★★

若抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴只有一个公共点，且过点 $A(m, n)$ ， $B(m + 6, n)$ ，则 n 的值为 () ．

A. 9

B. 6

C. 3

D. 0

【答案】 A

【解析】 $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴只有一个交点，

$\therefore$ 当 $b^2 - 4ac = 0$ ， $b^2 = 4c$ ，

$\therefore$ 点 $A(m, n)$ ， $B(m + 6, n)$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore \text{点 } A、B \text{ 关于直线 } x = -\frac{b}{2} \text{ 对称,} \\
&\therefore A\left(-\frac{b}{2}-3, n\right), \\
&\therefore n = \left(-\frac{b}{2}-3\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2}-3\right) + c \\
&\quad = -\frac{1}{4}b^2 + c + 9, \\
&\therefore b^2 = 4c, \\
&\therefore n = -\frac{1}{4} \times 4c + c + 9 = 9. \\
&\text{故选 A.}
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

6. 2019~2020学年12月四川成都锦江区四川师范大学附属第一实验中学初三上学期周测A卷第9题3分

★★

关于 x 的函数 $y = ax^2 + (2a+1)x + a-1$ 与坐标轴有两个交点，则 a 的取值有（ ）。

- A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

【答案】B

【解析】 $\therefore$ 关于 x 的函数 $y = ax^2 + (2a+1)x + a-1$ 的图象与坐标轴有两个交点，

$\therefore$ 可分如下三种情况：

①当函数为一次函数时，即有 $a=0$ ，

$\therefore a=0$ ，此时， $y=x-1$ ，与坐标轴有两个交点；

②当函数为二次函数时，（即 $a \neq 0$ ），与 x 轴有一交点，与 y 轴有一个交点，

$\therefore$ 函数与 x 轴有一个交点，

$\therefore \Delta = 0$ ，

$\therefore (2a+1)^2 - 4a(a-1) = 0$ ，

解得： $a = -\frac{1}{8}$ ；

③函数为二次函数时（即 $a \neq 0$ ），与 x 轴有两个交点，与 y 轴的交点和 x 轴上的一个交点重合，即图象经过坐标原点 $(0,0)$ ，

$\therefore a-1=0$ ，

$\therefore a=1$ ，

$\therefore$ 当 $a=1$ ，此时， $y=x^2+3x$ ，与坐标轴有两个交点，

$\therefore$ 综上所述， a 的取值为 $0, -\frac{1}{8}, 1$ 。

故选 B。

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

7. 2019~2020学年河南漯河临颍县初三上学期期末第5题3分 ★★

对于二次函数 $y = 4(x+1)(x-3)$ 下列说法正确的是 () .

- A. 图象开口向下
B. 与 x 轴交点坐标是 $(1,0)$ 和 $(-3,0)$
C. $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小
D. 图象的对称轴是直线 $x = -1$

【答案】 C

【解析】 A 选项: $\because y = 4(x+1)(x-3) = 4(x-1)^2 - 16$

,

$\therefore a = 4 > 0$, 该抛物线的开口向上, 故 A 错误;

B 选项: 与 x 轴的交点坐标是 $(-1,0)$ 、 $(3,0)$,

故 B 错误;

C 选项: 当 $x < 1$ 时, y 随 x 的增大而减小, 故 C

正确;

D 选项: 图象的对称轴是直线 $x = 1$, 故 D 错

误;

故选 C.

【标注】 【能力】 推理论证能力

【知识点】 二次函数与坐标轴交点

8. 2019~2020学年浙江杭州江干区杭州师范大学东城中学初三上学期单元测试《二次函数》第6题3分

★★

若二次函数 $y = ax^2 - 2ax + c$ 的图象经过点 $(-1,0)$, 则方程 $ax^2 - 2ax + c = 0$ 的解为 () .

- A. $x_1 = -3$, $x_2 = -1$
B. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$
C. $x_1 = -1$, $x_2 = 3$
D. $x_1 = -3$, $x_2 = 1$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = ax^2 - 2ax + c$ 的图象经过点 $(-1,0)$,

$\therefore$ 方程 $ax^2 - 2ax + c = 0$ 一定有一个解为: $x = -1$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为: 直线 $x = 1$,

$\therefore$ 二次函数 $y = ax^2 - 2ax + c$ 的图象与 x 轴的另一个交点为: $(3,0)$,

$\therefore$ 方程 $ax^2 - 2ax + c = 0$ 的解为: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

【标注】 【知识点】 二次函数与一元二次方程的关系

9. 2019~2020学年江苏南京建邺区南师附中新城初级中学黄山路分校初三下学期开学考试第4题2分

★★

已知二次函数 $y = x^2 - 5x + m$ 的图象与 x 轴有两个交点，若其中一个交点的坐标为 $(1, 0)$ ，则另一个交点的坐标为 () .

- A. $(-1, 0)$ B. $(4, 0)$ C. $(5, 0)$ D. $(-6, 0)$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = x^2 - 5x + m$,

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = \frac{5}{2}$,

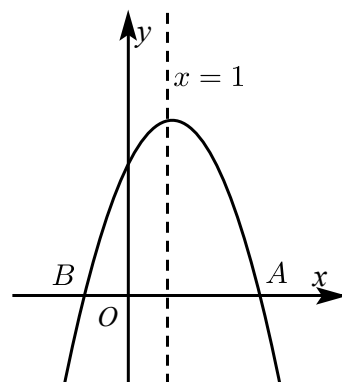
$\because$ 一个交点坐标为 $(1, 0)$,

$\therefore$ 另一个交点坐标为 $(4, 0)$.

【标注】 【知识点】二次函数与坐标轴交点

10. 2018~2019学年湖南长沙岳麓区湖南师大附中博才实验中学初二下学期期末第16题3分 ★★

如图，已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(3, 0)$ ，对称轴为直线 $x = 1$ ，则点 B 的坐标是 _____ .



【答案】 $(-1, 0)$

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点 ,

$\therefore$ 点 A 与点 B 关于直线 $x = -1$ 对称 ,

而对称轴是直线 $x = 1$, 点 A 的坐标为 $(3, 0)$. ,

$\therefore$ 点 B 的坐标是 $(-1, 0)$.

故答案为 $(-1, 0)$.

【标注】 【知识点】二次函数与坐标轴交点

练习

11. 2019~2020学年9月天津南开区天津市南开外国语中学初三上学期月考第6题4分 ★★

抛物线 $y = x^2 - 4$ 与 x 轴交于 B, C 两点, 顶点为 A , 则 $\triangle ABC$ 的周长为 () .

- A. $4\sqrt{5}$ B. $4\sqrt{5} + 4$ C. 12 D. $2\sqrt{5} + 4$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 令 $y = 0, x^2 - 4 = 0,$

$$x_1 = 2, x_2 = -2,$$

$$\therefore BC = 4,$$

抛物线 $y = x^2 - 4$ 的顶点坐标为 $A(0, -4),$

$$\therefore AB = AC = 2\sqrt{5}.$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周长为 } = AB + AC + BC$$

$$= 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 4$$

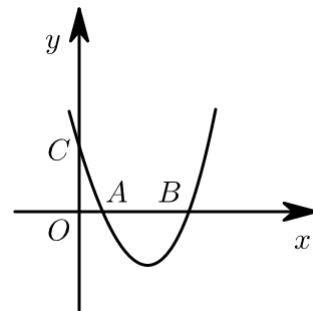
$$= 4\sqrt{5} + 4.$$

故选 B .

【标注】 【知识点】 二次函数与坐标轴交点

12. 2015年甘肃武威凉州区武威第四中学初三中考二模第5题4分 ★★

如图, 二次函数 $y = x^2 - 4x + 3$ 的图象交 x 轴于 A, B 两点, 交 y 轴于 C , 则 $\triangle ABC$ 的面积为 () .



- A. 6 B. 4 C. 3 D. 1

【答案】 C

【解析】 在 $y = x^2 - 4x + 3$ 中, 当 $y = 0$ 时, $x = 1$ 或 3 ; 当 $x = 0$ 时, $y = 3$;

即 $A(1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$,

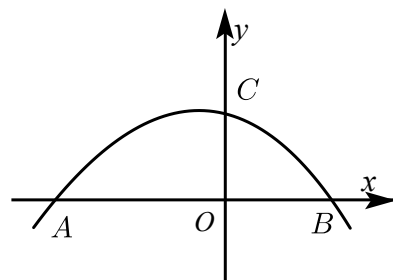
故 $\triangle ABC$ 的面积为: $\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3.$

故选 C .

【标注】 【知识点】 二次函数与坐标轴交点

13. ★★★

如图：已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于 C 点，且 $2OA = 3OB = 4OC$ ，则 b 的值为（ ）。



A. $-\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{4}$

C. $-\frac{3}{4}$

D. -1

【答案】B

【解析】略。

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

练习

14. 2014~2015学年12月江苏南京鼓楼区南京市第二十九中学初中部初三上学期月考第2题 ★★★

在平面直角坐标系中作出二次函数 $y = x^2 - 2x - 6$ 的图象，由图象可知，方程 $x^2 - 2x - 6 = 0$ 有两个根，一个在 -2 和 -1 之间，另一个在 3 和 4 之间。利用计算器进行探索：由下表知，方程的一个近似根是（ ）。

x	3.5	3.6	3.7	3.8
y	-0.75	-0.24	0.29	0.84

A. 3.5

B. 3.6

C. 3.7

D. 3.8

【答案】B

【解析】当 y 等于 0 时， x 的值即为方程 $x^2 - 2x - 6 = 0$ 的一个根，分析表格方程的解应为 y 最接近 0 时 x 的值。 $x = 3.6$ 时的 y 值更接近 0。

【标注】【知识点】图象法求一元二次方程的近似根

15. 2016~2017学年12月江苏南京南京外国语学校初三上学期月考第3题2分 ★★

下列表格是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的自变量 x 与函数值 y 的对应值，判断方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, a, b, c 为常数) 的一个解 x 的范围是（ ）。

x	-2.14	-2.13	-2.12	-2.11
$y = ax^2 + bx + c$	-0.03	-0.01	0.02	0.04

A. $-2.14 < x < 2.13$

B. $-2.13 < x < -2.12$

C. $-2.12 < x < -2.11$

D. $-2.11 < x < -2.10$

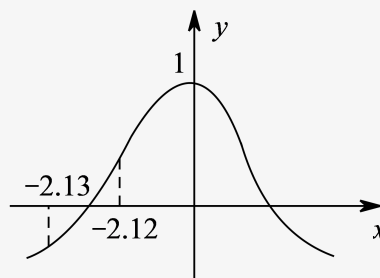
【答案】B

【解析】我们通过表格发现 $x = -2.13$ 时, $y = -0.01 < 0$.

$x = -2.12$ 时, $y = 0.02 > 0$.

所以当 $-2.13 < x < -2.12$ 时, 肯定存在一个 x 使得 $y = 0$.

故选 B.

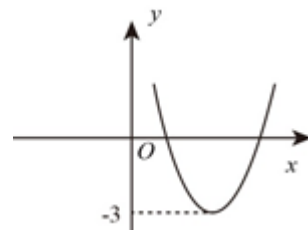


【标注】【知识点】图象法求一元二次方程的近似根

练习

16. 2017~2018学年9月天津红桥区天津市第五中学初三上学期月考 ★★★

(五中·月考) 已知函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 那么关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c + 2 = 0$ 的根的情况是 ()



A. 无实数根

B. 有两个相等实数根

C. 有两个异号实数根

D. 有两个同号不等实数根

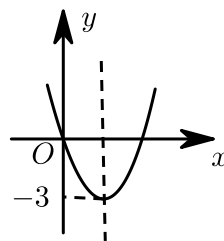
【答案】D

【解析】略

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

17. 2015~2016学年天津和平区初三上学期期中第11题3分 ★★

二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图象如图所示, 若一元二次方程 $ax^2 + bx + m = 0$ 有实数根, 则 m 的取值范围是 ().



A. $m \leq 3$

B. $m \geq 3$

C. $m \leq -3$

D. $m \geq -3$

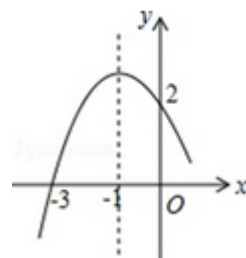
【答案】 A

【解析】 由图可得， $-m \geq -3$ ，所以 $m \leq 3$.

【标注】 【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

18. 2017~2018学年浙江杭州萧山区初三上学期中戴村片第14题4分 ★★★

已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的部分图象如图所示，则关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 2$ ($a \neq 0$) 的解为 _____ .



【答案】 $x = 0$ 或 $x = -2$

【解析】 抛物线的对称轴为 $x = -1$ ，与 y 轴交于点 $(0, 2)$ ，

当 $y = 2$ 时， $ax^2 + bx + c = 2$ ($a \neq 0$)，

即纵坐标为 2 的点是 $(0, 2)$ 或 $(-2, 2)$ ，

$\therefore x = 0$ 或 $x = -2$ ，

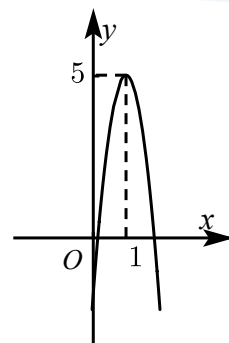
$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 2$ 的解为 $x_1 = 0$ ， $x_2 = -2$ ；

故答案为： $x_1 = 0$ ， $x_2 = -2$ 。

【标注】 【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

19. 2018~2019学年天津武清区初三上学期中第14题3分 ★★

已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示，若方程 $ax^2 + bx + c = k$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是 _____ .



【答案】 $k < 5$

【解析】 由图象可知：二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点坐标为 $(1, 5)$ ，

$$\therefore \frac{4ac - b^2}{4a} = 5, \text{ 即 } b^2 - 4ac = -20a,$$

$\therefore ax^2 + bx + c = k$ 有两个不相等的实数根，

$\therefore$ 方程 $ax^2 + bx + c - k = 0$ 的判别式 $\Delta > 0$ ，

$$\text{即 } b^2 - 4a(c - k)$$

$$= b^2 - 4ac + 4ak$$

$$= -20a + 4ak$$

$$= -4a(5 - k) > 0,$$

$\therefore$ 抛物线开口向下，

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore 5 - k > 0,$$

$$\therefore k < 5.$$

【标注】 【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

练习

20. 2016年江苏南京初三中考二模联合体第16题2分 ★★

已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与自变量 x 的部分对应值如表：

x	...	-1	0	1	3	...
y	...	-3	1	3	1	...

现给出下列说法：

- ①该函数开口向下．
- ②该函数图象的对称轴为过点 $(1, 0)$ 且平行于 y 轴的直线．
- ③当 $x = 2$ 时， $y = 3$ ．
- ④方程 $ax^2 + bx + c = -2$ 的正根在 3 与 4 之间．

其中正确的说法为 _____．（只需写出序号）

【答案】①③④

【解析】∵二次函数值先由小变大，再由大变小，

∴抛物线的开口向下，所以①正确；

∴抛物线过点 $(0, 1)$ 和 $(3, 1)$ ，

∴抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$ ，所以②错误；

点 $(1, 3)$ 和点 $(2, 3)$ 为对称点，所以③正确；

∴ $x = -1$ 时， $y = -3$ ，

∴ $x = 4$ 时， $y = -3$ ，

∴二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的函数值为 -2 时， $-1 < x < 0$ 或 $3 < x < 4$ ，

即方程 $ax^2 + bx + c = -2$ 的负根在 -1 与 0 之间，正根在 3 与 4 之间，所以④正确。

【标注】【题型】图象与系数的关系

21. 2020~2021学年山东临沂兰陵县初三上学期期中第11题3分 ★★

已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过 $(-3, 0)$ 与 $(1, 0)$ 两点，关于 x 的方程

$ax^2 + bx + c + m = 0 (m > 0)$ 有两个根，其中一个根是 3 。则关于 x 的方程

$ax^2 + bx + c + n = 0 (0 < n < m)$ 有两个整数根，这两个整数根是 ()。

A. -2 或 0

B. -4 或 2

C. -5 或 3

D. -6 或 4

【答案】B

【解析】∵抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交点坐标为 $(-3, 0)$ ， $(1, 0)$ ，

∴抛物线对称轴为直线 $x = \frac{-3+1}{2} = -1$ ，

∴关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c + m = 0$ ，其中一根为 3 ，

∴根据对称性可知方程的另一根为 -5 ，

∴关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c + n = 0 (0 < n < m)$ 有两个整数根，分别为 x_1 、 $x_2 (x_1 < x_2)$

，

∴ $x_1 = -4$ ， $x_2 = 2$ ，

故这两个整数根为 -4 或 2 。

故选 B。

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

练习

22. 2019~2020学年10月天津和平区天津市耀华中学初三上学期月考第10题3分 ★★

已知二次函数 $y = (x-a)(x-b)$ ，其中 $a < b$ ， m 、 n ($m < n$) 是方程 $1 + (x-a)(x-b) = 0$ 的两个根，则实数 a 、 b 、 m 、 n 的大小关系是 ()。

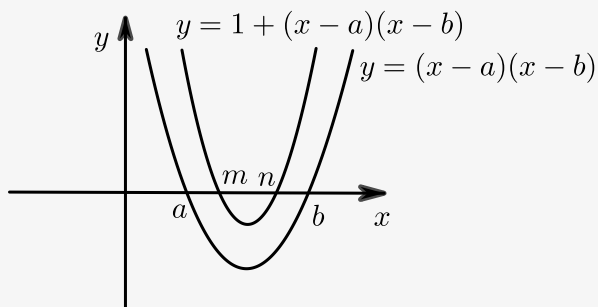
- A. $a < m < b < n$ B. $m < a < b < n$ C. $a < m < n < b$ D. $m < a < n < b$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 函数 $y = (x-a)(x-b)$ 与 x 轴的交点坐标为 $(a, 0)$ ， $(b, 0)$ ，

二次函数 $y = 1 + (x-a)(x-b)$ 相当于 $y = (x-a)(x-b)$ 向上平移一个单位，

又因为二次函数为 1，开口向上，如图所示：



$\therefore$ 由图可得： $a < m < n < b$ 。

故选 C。

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

23. 2019~2020学年9月天津和平区天津市第一中学初三上学期月考第17题3分 ★★

“如果二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴有两个公共点，那么一元二次方程有两个不相等的实数根。”请根据你对这句话的理解，解决下面问题；若 p 、 q ($p < q$) 是关于 x 的方程

$2 - (x-a)(x-b) = 0$ 的两根，且 $a < b$ ，则请用“ $<$ ”来表示 a 、 b 、 p 、 q 的大小关系是 _____。

【答案】 $p < a < b < q$

【解析】 令 $y = (x-a)(x-b)$ ，则该函数的图象开口向上，

当 $y = 0$ 时， $x_1 = a$ ， $x_2 = b$ ，

当 $y = 2$ 时，

$$2 = (x-a)(x-b)，$$

$$\text{即 } 2 - (x-a)(x-b) = 0，$$

$\because p$ 、 q ($p < q$) 是关于 x 的方程 $2 - (x-a)(x-b) = 0$ 的两根，且 $a < b$ ，

$\therefore p < a < b < q$ 。

故答案为： $p < a < b < q$ 。

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

练习

24. ★★

一次函数 $y = x + b$ 的图象与抛物线 $y = x^2 + 3x - 1$ 只有一个交点，则 $b =$ _____ .

【答案】 4

【解析】 由题可知它们只有一个交点，我们可以联立方程组解答此题。

联立方程组，把一式 $y = x + b$ 带入抛物线方程解，即可得到答案。

【标注】 【知识点】 一次函数与二次函数的交点

25. 2018~2019学年10月天津河西区天津市新华中学初三上学期月考第17题3分 ★★

直线 $y = x$ 与抛物线 $y = x^2 - 2$ 有两个交点 P 和 Q ，则 $PQ =$ _____ .

【答案】 $3\sqrt{2}$

【解析】 由题意得： $\begin{cases} y = x \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 2 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -1 \end{cases}$ ，

$\therefore P$ 和 Q 点的坐标为 $(2, 2)$ 、 $(-1, -1)$ ，

从点 $(-1, -1)$ 向 y 轴作垂线与从点 $(2, 2)$ 向 x 轴作垂线相交于一点 M ，

则 $\triangle PMQ$ 为直角三角形，

则 $PQ = \sqrt{(-1-2)^2 + [-1+(-2)]^2} = 3\sqrt{2}$.

【标注】 【知识点】 一次函数与二次函数的交点

26. 2018~2019学年甘肃定西陇西县初三上学期期中第16题3分 ★★

直线 $y = 2x + 2$ 与抛物线 $y = x^2 + 3x$ 的交点坐标为 _____ .

【答案】 $(-2, -2)$ ， $(1, 4)$

【解析】 $\therefore$ 由题意得 $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = x^2 + 3x \end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 直线 $y = 2x + 2$ 与抛物线 $y = x^2 + 3x$ 的交点坐标为 $(-2, -2)$ ， $(1, 4)$.

【标注】 【知识点】 一次函数与二次函数的交点

练习

27. ★★

如果过两点 $A(a, 0)$ 和 $B(0, a)$ 的直线与抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 没有交点，那么实数 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $a < -\frac{13}{4}$

【解析】 含参解析式必须也要求解的快速准确 .

【标注】 【知识点】一次函数与二次函数的交点

28. 2020年四川成都崇州市初三中考一模第23题4分 ★★★

已知函数 $y = mx^2 - 3x + 2$ (m 是常数) , 若一次函数 $y = x + 1$ 的图象与该函数的图象恰好只有一个交点，则交点坐标为 _____ .

【答案】 $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$ 或 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

【解析】 ①当 $m = 0$ 时，函数 $y = mx^2 - 3x + 2$ 为一次函数 $y = -3x + 2$,

令： $-3x + 2 = x + 1$, 解得 $x = \frac{1}{4}$, $\therefore$ 交点为 $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$.

②当 $m \neq 0$ 时，函数 $y = mx^2 - 3x + 2$ 为二次函数 . 若一次函数 $y = x + 1$ 的图象与函数 $y = mx^2 - 3x + 2$ 的图象只有一个交点，令 $mx^2 - 3x + 2 = x + 1$, 即 $mx^2 - 4x + 1 = 0$,

由 $\Delta = 0$, 得 $m = 4$, 此时交点为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

故答案为： $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$ 或 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

【标注】 【知识点】一次函数与二次函数的交点

29. 2016~2017学年12月江苏南京秦淮区南京市第一中学初中部初三上学期月考（目标校）第3题2分

★★

若二次函数 $y = x^2$ 与一次函数 $y = kx - 2$ 的图象有交点，则 k 的值可以是 () .

A. 1

B. 0

C. -1

D. -3

【答案】 D

【解析】 二次函数 $y = x^2$ 与一次函数 $y = kx - 2$ 的图象有交点，

则可列 $x^2 = kx - 2$, $x^2 - kx + 2 = 0$,

即 $x^2 - kx + 2 = 0$ 有解，

根的判别式 $b^2 - 4ac = k^2 - 8 \geq 0$,

解得 $k^2 \geq 8$.

故选 D .

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

练习

30. ★★★

已知二次函数图象的对称轴平行于 y 轴，顶点为 $(1, 2)$ ，且与直线 $y = 2x + k$ 相交于 $(2, -1)$ ，试求：

(1) 二次函数的解析式 .

(2) k 的值 .

(3) 该二次函数的图象与直线 $y = 2x + k$ 的另一交点的坐标 .

【答案】 (1) 二次函数解析式为 $y = -3(x - 1)^2 + 2$.

(2) $k = -5$.

(3) 二次函数的图象与直线 $y = 2x + k$ 的另一交点的坐标为 $(-\frac{2}{3}, -\frac{19}{3})$.

【解析】 (1) 因为二次函数图象的顶点为 $(1, 2)$ ，对称轴平行于 y 轴，

所以，可令此二次函数的解析式为 $y = a(x - 1)^2 + 2$.

又点 $(2, -1)$ 在二次函数的图象上，则有 $-1 = a(2 - 1)^2 + 2$ ，得 $a = -3$.

故所求的二次函数解析式为 $y = -3(x - 1)^2 + 2$.

(2) 由题意知点 $(2, -1)$ 在直线 $y = 2x + k$ 上，则 $-1 = 2 \times 2 + k$ ，得 $k = -5$.

(3) 根据题意有 $2x - 5 = -3(x - 1)^2 + 2$ ，即 $3x^2 - 4x - 4 = 0$ ，得 $x = 2$ 或 $x = -\frac{2}{3}$.

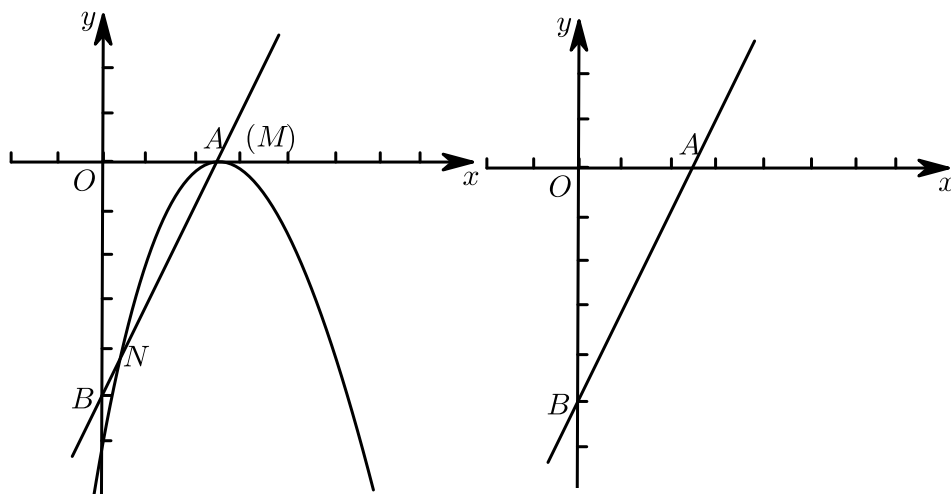
所以 $x = 2$ 时， $y = -1$ ； $x = -\frac{2}{3}$ 时， $y = -\frac{19}{3}$.

故二次函数的图象与直线 $y = 2x + k$ 的另一交点的坐标为 $(-\frac{2}{3}, -\frac{19}{3})$.

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

31. 2019年广东汕尾陆丰市初三中考一模第25题9分 ★★★

已知直线 $y = 2x - 5$ 与 x 轴和 y 轴分别交于点 A 和点 B ，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 的顶点 M 在直线 AB 上，且抛物线与直线 AB 的另一个交点为 N .



(1) 如图, 当点 M 与点 A 重合时, 求抛物线的解析式.

(2) 在(1)的条件下, 求点 N 的坐标和线段 MN 的长.

【答案】 (1) $y = -x^2 + 5x - \frac{25}{4}$.

(2) $N(\frac{1}{2}, -4)$, $MN = 2\sqrt{5}$.

【解析】 (1) $\because$ 直线 $y = 2x - 5$ 与 x 轴和 y 轴交于点 A 和点 B ,

$$\therefore A\left(\frac{5}{2}, 0\right), B(0, -5),$$

当顶点 M 与点 A 重合时, $M\left(\frac{5}{2}, 0\right)$,

$$\therefore \text{抛物线的解析式是: } y = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2,$$

$$\text{即 } y = -x^2 + 5x - \frac{25}{4}.$$

(2) $\because N$ 在直线 $y = 2x - 5$ 上, 设 $N(a, 2a - 5)$, 又 N 在抛物线 $y = -x^2 + 5x - \frac{25}{4}$ 上,

$$\therefore 2a - 5 = -a^2 + 5a - \frac{25}{4},$$

解得 $a = \frac{1}{2}$ 或 $a = \frac{5}{2}$ (舍去),

$$\therefore N\left(\frac{1}{2}, -4\right),$$

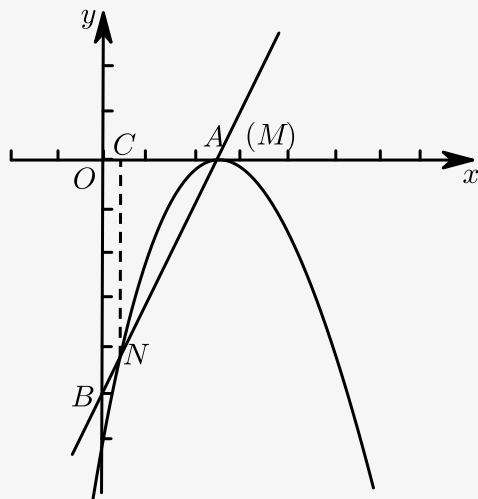
过 N 作 $NC \perp x$ 轴, 垂足为 C ,

$$\therefore N\left(\frac{1}{2}, -4\right),$$

$$\therefore C\left(\frac{1}{2}, 0\right),$$

$$\therefore NC = 4, MC = OM - OC = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2,$$

$$\therefore MN = \sqrt{NC^2 + MC^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$$



【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

32. 2019年天津河西区初三毕业考试第25题10分 ★★★

在平面直角坐标系中，已知抛物线 $y = -x^2 + 3x + m$ ，其中 m 为常数．

- (1) 当抛物线经过点 $(3, 5)$ 时，求该抛物线的解析式．
- (2) 当抛物线与直线 $y = x + 3m$ 只有一个交点时，求该抛物线的解析式．
- (3) 当 $0 \leq x \leq 4$ 时，试通过 m 的取值范围讨论抛物线与直线 $y = x + 2$ 的公共点的个数的情况．

【答案】(1) 抛物线得解析式为 $y = -x^2 + 3x + 5$ ．

(2) 抛物线得解析式为 $y = -x^2 + 3x + \frac{1}{2}$ ．

- (3) 当 $m < 1$ 或 $m > 10$ 时，没有公共点，
 当 $1 < m \leq 2$ 时，有两个公共点，
 当 $2 < m \leq 10$ 或 $m = 1$ 时，有一个公共点．

【解析】(1) $\because$ 过点 $(3, 5)$ ，

$$\therefore -9 + 9 + m = 5,$$

$$\therefore m = 5,$$

$\therefore$ 抛物线得解析式为 $y = -x^2 + 3x + 5$ ．

(2) $\because$ 抛物线与直线 $y = x + 3m$ 只有一个交点，

$$\therefore \text{由 } \begin{cases} y = -x^2 + 3x + m \\ y = x + 3m \end{cases} \text{ 可得 } x^2 - 2x + 2m = 0,$$

$$\text{由 } \Delta = 0, \text{ 可得 } m = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 抛物线得解析式为 $y = -x^2 + 3x + \frac{1}{2}$ ．

(3) 由 $\begin{cases} y = -x^2 + 3x + m \\ y = x + 2 \end{cases}$ 可得 $x^2 - 2x + 2 - m = 0$ ，

由 $\Delta = 0$ ，可得 $m = 1$ ，此时只有一个公共点，

在直线 $y = x + 2$ 上，当 $x = 0$ 时， $y = 2$ ，

当 $x = 4$ 时， $y = 6$ ，

将 $(0, 2)$ 代入抛物线 $y = -x^2 + 3x + m$ ，得 $m = 2$ ，

将 $(4, 6)$ 代入抛物线 $y = -x^2 + 3x + m$ ，得 $m = 10$ ，

①当 $m < 1$ 时，没有公共点，

②当 $1 < m \leq 2$ 时，有两个公共点，

③当 $2 < m \leq 10$ 时，有一个公共点，

④当 $m > 10$ 时，没有公共点。

综上，当 $m < 1$ 或 $m > 10$ 时，没有公共点，

当 $1 < m \leq 2$ 时，有两个公共点，

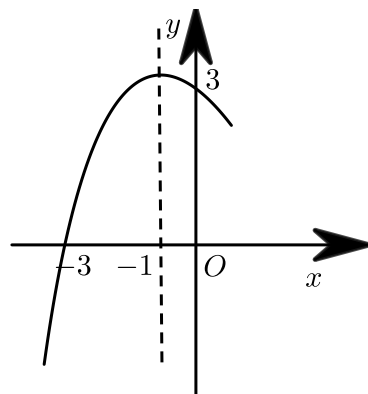
当 $2 < m \leq 10$ 或 $m = 1$ 时，有一个公共点。

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

练习

33. 2019~2020学年广东广州南沙区广州外国语学校初三上学期期中第5题3分 ★★

二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的部分图象如图所示，则不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集是 ()。



A. $x > -3$

B. $x < -3$

C. $-3 < x < 1$

D. $x < -3$ 或 $x > 1$

【答案】 D

【解析】 不等式的解即为二次函数在 x 轴下方时所对应的 x 的范围，图象与 x 轴的另一个交点坐标必然和 $(-3, 0)$ 关于对称轴 $x = -1$ 对称，因此为 $-1 \times 2 - (-3) = 1$ 。

因此，在 x 轴下方时所对应的 x 的取值范围为 $x < -3$ 或 $x > 1$ 。

A、B、C 均不全面或不满足，只有 D 完全符合。

故选 D。

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

34. 2020~2021学年9月天津河北区天津市第二中学初三上学期月考第7题2分 ★★

已知函数 $y = -x^2 + x + 2$ ，则当 $y < 0$ 时，自变量 x 的取值范围是 ()。

A. $x < -1$ 或 $x > 2$

B. $-1 < x < 2$

C. $x < -2$ 或 $x > 1$

D. $-2 < x < 1$

【答案】 A

【解析】 解：当 $y = 0$ 时， $-x^2 + x + 2 = 0$ ，

$$(x+1)(-x+2) = 0,$$

$$x_1 = -1, x_2 = 2,$$

由于函数开口向下，

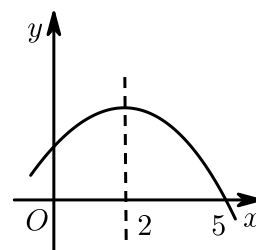
可知当 $y < 0$ 时，自变量 x 的取值范围是 $x < -1$ 或 $x > 2$ 。

故选 A。

【标注】 【知识点】 利用二次函数解不等式问题

35. 2017年河南新乡初三中考一模第8题3分 ★★

如图是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的部分图象，由图象可知不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 ()。



A. $-1 < x < 5$

B. $x > 5$

C. $x < -1$

D. $x < -1$ 或 $x > 5$

【答案】 A

【解析】 ∵ 抛物线的对称轴是直线 $x = 2$ ，与 x 轴的一个交点坐标是 $(5, 0)$ ，

∴ 另一个交点坐标是 $(-1, 0)$ ，

又∵ 抛物线开口向下，

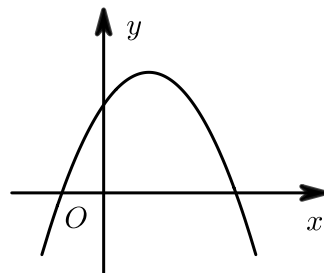
∴ 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $-1 < x < 5$ 。

【标注】 【知识点】 利用二次函数解不等式问题

练习

36. 2019~2020学年12月广东深圳福田区深圳市高级中学初三上学期周测B卷第6题5分 ★★

如图是二次函数 $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$ 的图象，使 $y \geq 1$ 成立的 x 的取值范围是 ()。



A. $-1 \leq x \leq 4$

B. $x \leq 0$

C. $x \geq 1$

D. $0 \leq x \leq 4$

【答案】 D**【解析】** 当 $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3 = 1$ 时,

$$(x-2)^2 = 4,$$

$$x-2 = \pm 2,$$

$$x_1 = 4 \text{ 或 } x_2 = 0,$$

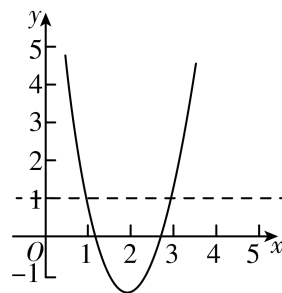
当 $y \geq 1$ 时,由图可得 $0 \leq x \leq 4$,

故选 D.

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

37. 2016~2017学年江苏泰州姜堰市初三上学期期末第6题3分 ★★

如图, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象与直线 $y = 1$ 的交点坐标为 $(1, 1)$, $(3, 1)$, 则不等式 $ax^2 + bx + c - 1 > 0$ 的解集为().



A. $x > 1$

B. $1 < x < 3$

C. $x < 1 \text{ 或 } x > 3$

D. $x > 3$

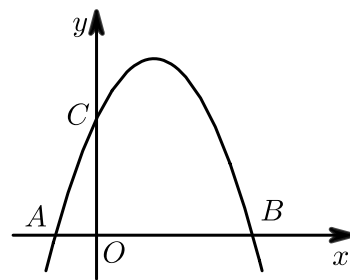
【答案】 C**【解析】** 根据图象得二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象与直线 $y = 1$ 的交点坐标为 $(1, 1)$, $(3, 1)$,而 $ax^2 + bx + c - 1 > 0$, 即 $y > 1$,故 $x < 1$ 或 $x > 3$.

故选: C.

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

38. 2020~2021学年10月浙江杭州西湖区杭州市保俶塔实验学校初中部初三上学期月考第14题4分 ★★

如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 分别交坐标轴于 $A(-2, 0)$ 、 $B(6, 0)$ 、 $C(0, 4)$, 则 $0 \leq ax^2 + bx + c < 4$ 的解集是 _____.



【答案】 $-2 \leq x < 0$ 或 $4 < x \leq 6$

【解析】 $\because A(-2, 0)$ 、 $B(6, 0)$,

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = \frac{-2+6}{2} = 2$,

$\therefore$ 点 C 的对称点的坐标为 $(4, 4)$,

$\therefore 0 \leq ax^2 + bx + c < 4$ 的解集为 $-2 \leq x < 0$ 或 $4 < x \leq 6$.

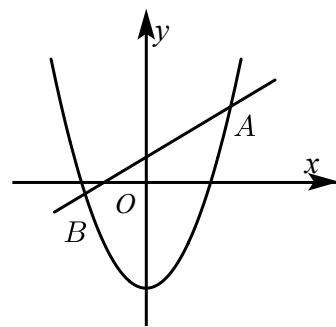
故答案为： $-2 \leq x < 0$ 或 $4 < x \leq 6$.

【标注】 【知识点】利用二次函数解不等式问题

练习

39. 2019~2020学年江苏扬州高邮市初三上学期期末第15题3分 ★★

如图，若抛物线 $y = ax^2 + h$ 与直线 $y = kx + b$ 交于 $A(3, m)$ ， $B(-2, n)$ 两点，则不等式 $ax^2 - b < kx - h$ 的解集是 _____.



【答案】 $-2 < x < 3$

【解析】 设 $y_1 = ax^2 + h$ ， $y_2 = kx + b$ ，

$\therefore ax^2 - b < kx - h$ ，

$\therefore ax^2 + h < kx + b$ ，

$\therefore y_1 < y_2$ ，

即二次函数值小于一次函数值，

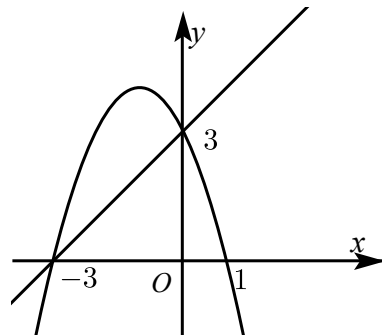
$\therefore$ 抛物线与直线交点为 $A(3, m)$ ， $B(-2, n)$ ，

$\therefore$ 由图象可得， x 的取值范围是 $-2 < x < 3$.

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

40. 2019~2020学年11月吉林长春二道区长春五十二中赫行实验学校初三上学期月考第13题3分 ★★

二次函数 $y_1 = ax^2 + bx + c$ 与一次函数 $y_2 = mx + n$ 的图象如图所示，则满足 $ax^2 + bx + c > mx + n$ 的 x 的取值范围是 _____ .



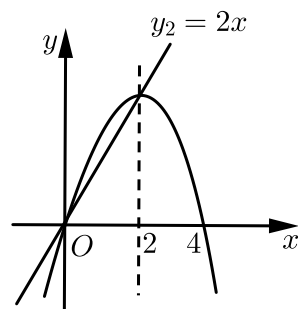
【答案】 $-3 < x < 0$

【解析】 由图可知，当 $-3 < x < 0$ 时二次函数图象在一次函数图象上方，
所以满足 $ax^2 + bx + c > mx + n$ 的 x 的取值范围是 $-3 < x < 0$.

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

41. 2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学初三上学期月考第16题3分 ★★★

抛物线 $y_1 = -x^2 + 4x$ 和直线 $y_2 = 2x$ 的图象如图，那么不等式 $-x^2 + 4x > 2x$ 的解集是 () .



A. $x < 0$

B. $0 < x < 2$

C. $x > 2$

D. $x < 0$ 或 $x > 2$

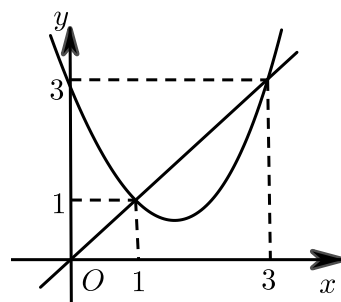
【答案】 B

【解析】 由图可知，抛物线 $y_1 = -x^2 + 4x$ 和直线 $y_2 = 2x$ 的交点坐标为 $(0, 0)$ ， $(2, 4)$ ，所以，不等式 $-x^2 + 4x > 2x$ 的解集是 $0 < x < 2$.
故选 B .

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

42. 2019~2020学年江苏苏州张家港市初三上学期期末第14题3分 ★★

已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与一次函数 $y = x$ 的图象如图所示，则不等式 $ax^2 + (b-1)x + c < 0$ 的解集为 _____ .



【答案】 $1 < x < 3$

【解析】 由函数图象可知，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与一次函数 $y = x$ 的图象交于点 $(1, 1)$ 和 $(3, 3)$

，
不等式 $ax^2 + (b-1)x + c < 0$ 的解集即为不等式 $ax^2 + bx + c < x$ 的解集，

由函数图象可知：当 $1 < x < 3$ 时， $ax^2 + bx + c < x$ ，

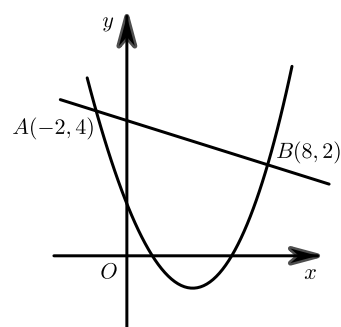
∴ 不等式 $ax^2 + (b-1)x + c < 0$ 的解集为 $1 < x < 3$.

故答案为： $1 < x < 3$.

【标注】 【知识点】利用二次函数解不等式问题

43. 2020~2021学年浙江杭州江干区杭州国泰外语艺术学校初中部初三上学期期中第12题4分 ★★

如图，已知二次函数 $y_1 = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与一次函数 $y_2 = kx + m (k \neq 0)$ 的图象相交于点 $A(-2, 4)$ ， $B(8, 2)$ ，则关于 x 的不等式 $ax^2 + (b-k)x + c - m > 0$ 的解集是 _____ .



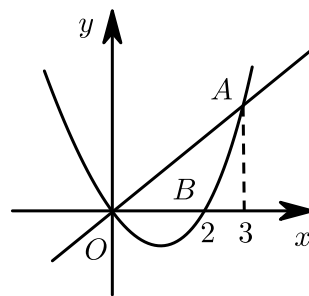
【答案】 $x < -2$ 或 $x > 8$

【解析】 先对这个不等式进行变形，然后观察图象 .

【标注】 【知识点】利用二次函数解不等式问题

44. 2015年广西贵港中考真题第11题 ★★

如图，已知二次函数 $y_1 = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$ 的图象与正比例函数 $y_2 = \frac{2}{3}x$ 的图象交于点 $A(3, 2)$ ，与 x 轴交于点 $B(2, 0)$ ，若 $0 < y_1 < y_2$ ，则 x 的取值范围是（ ）。



A. $0 < x < 2$

B. $0 < x < 3$

C. $2 < x < 3$

D. $x < 0$ 或 $x > 3$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 二次函数 $y_1 = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$ 的图象与正比例函数 $y_2 = \frac{2}{3}x$ 的图象交于点 $A(3, 2)$ ，
与 x 轴交于点 $B(2, 0)$ ，
 $\therefore$ 由图象得：若 $0 < y_1 < y_2$ ，则 x 的取值范围是： $2 < x < 3$ 。

【标注】 【知识点】一次函数与二次函数的交点